DOI:10.16698/j.hpu(social. sciences).1673-9779.2009.04.023

河南理工大学学报(社会科学版),第 10卷,第 4期,2009年 10月
Journal of Henan Polytechnic University (Social Sciences), Vol.10 No.4 Oct. 2009

朱载堉十二平均律与《河图》《洛书》

张志庄
(焦作师范高等专科学校,河南 焦作 454001)

摘要:对黄钟、律本、度母及十二平均律的释解,诠释了朱载堉新法密率与《河图》、《洛书》的内在关系。《河图》内函方而圆其外之图解,详细标出了十二律之数据长度,并对《洛书》九数与十二律相配之法作了通俗的释解,文中引《周礼·大司乐》及《明实录》为证,将《洛书》九数、十二律吕、十二支辰、六代乐舞相配及祭祀应用作了详细的说明。

关键词:黄钟;律本;度母;《河图》;《洛书》
中图分类号:J6 文献标识码:A 文章编号:1673-9779(2009)04-0638-04

Zhu Zaiyu Temperament and《He Tu》《Luo Shu》

ZHANG ZHI-zhuang
(Jiaozuo Normal Teachers' College, Jiaozuo 454001, Henan, China)

Abstract: This paper by Huang Zhong, the law book, Tara, and tempered the release solution Zhu Zaiyu interpreted the new law density rate and the《River Map》,《Luo Shu》the intrinsic relationship. Through the《River Map》square and round away from it within the letter of the graphic detail of the data plotted Shier Lv length, and《Luo Shu》9 to match the number and Shier Lv Act has been popular allay the article, cited《Zhou Daiji Music》and《Ming Shi Lu》as the card. The《Luo Shu》nine the number of Shier Lv Lu and Chen 12, six generations of music and dance to match, and worship applications of detail.
Key words: Huang Zhong; The law book; ara; He Tu; Luo Shu

朱载堉"新法密律"(十二平均律)成书于1581年以前,"新法密律"最早出现于《律学新说》[1],该书《序》后首章题目为"律吕本源第一",开篇即言"夫《河图》、《洛书》者,律历之本源,数学之鼻祖也"。本节朱氏曰:"黄钟之尺长十寸,乃《河图》之偶自相乘之数也,是为度母。黄钟之尺长九寸,乃《洛书》之奇自相乘之数也,是为律本。"纵观《河图》黑白点数五十有五,洛书点数四十有五,十二律与之有何渊源,本文释解如下。

一、黄钟律解

黄钟是中国古代十二律的第一律,历史上他的实际意义超出了乐律学的范畴,具有浓重的政治色彩。就律学而言,黄钟是中国古代的标准音,对中国古代社会而言,又是更弦易辙、改朝换代的标志。在中国古代社会,黄钟为万事之本,与度、量、衡紧密相联,历代黄钟律音高之变迁与各朝代尺度之变化互为因果。所以中国古代黄钟律音高在各个朝代大相径庭,各不相同(表 1)。为此,黄钟律音高的确定也就成了攸关社稷的大事。

收稿日期:2009-07-21
作者简介:张志庄(1955-),男,河南焦作人,教授,从事戏剧艺术和音乐理论的研究与教学工作。
E-mail: 444305475@qq.com

表 1　历代黄钟律音高对照表

黄钟律所在律的名称	频率 /Hz	现代音名以 a=440次为标准
春秋战国黄钟律不详		
汉·刘歆律	346 7	f1_12 58
汉·蔡邕铜管律	332 4	e1+14 5
魏·杜夔律	370 1	f1+0.94
晋·荀勖律	387.5	g1_19.96
梁武帝律	384 9	g1_31.62
宋、齐、梁、陈北国铁尺律	364 2	#f1_27.32
隋开皇初年律、唐贞观雅乐律	364 2	f1_27.32
唐·俗乐律	435.9	a1_15.96
后周王朴与宋初律	379.5	#f1+43.91
宋·大晟九寸律与金元明雅乐律	298 7	d1+29.43
明·朱载育律	315.0	be1+21.42
清·康熙律	344 4	f1_24.1

中国古代是怎样确立黄钟律之音高呢？据《汉书·律历志》[2]记载，黄钟律是以黍粒的累计来确定的。黍为谷物，不去皮曰黍，去皮曰米。以一定数量黍粒的纵排、斜排、横排的长度为尺，即为黄钟律管之长度。纵黍 1黍为分，9黍为寸，9寸 81黍为尺者，朱载堉称之为“纵黍尺、轩辕氏尺或宋尺”，亦称黄帝尺或古律尺。该尺在寸以下为 9进位制，即 9微为忽，9忽为丝，9丝为毫，9毫为厘，9厘为分，9分为寸，9寸为尺。以此尺长度截管偏口吹为黄钟律音高，用此尺按三分损益法生成的黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑冼、仲吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟 12律，朱载堉称之为约律。

横黍 1黍为分，10黍为寸，100黍为尺者，曰横黍尺、夏尺或虞尺。朱载堉所创密率（十二平均律）黄钟所用之尺即夏尺（25.48厘米），该尺以 10进位。即 10微为忽，10忽为丝，10丝为毫，10毫为厘，10厘为分，10分为寸，10寸为尺。如律管直径相同，管愈长则音愈低。纵黍尺与横黍尺排法和进位虽异，但其长度相等。黄钟律管长度确定之后，本朝代之“度”即告完成。

二、律本、度母解

中国古代社会历来均把“制律吕，正声音”当做大事，历次改朝换代首先确定“黄钟”，以黄钟律管之长度定下度、量、衡制。黄钟律管之长虽历代说法不一，但古人称律之妙唯两种而已。其一，以 9寸为黄钟，得 81分，取象《洛书》之奇 9自乘之数，此法在《淮南子》[3]书中有载。其二，以 10寸为黄钟，得 100分，取象《河图》之偶 10自乘之数，此法《史记》[4]卷二十五有记。换言之，以 9寸或 10寸为黄钟，其基数分别取自《洛书》、《河图》。试看《洛书》9为至尊，以 1、3、5、7、9为阳，9乃阳数之首，奇数之极。再看《河图》10为至尊，以偶数 2、4、6、8、10为阴，10乃阴数之首，偶数之极。黄钟律两基数《河图》、《洛书》中都具有，所以朱氏称《河图》为度母，称《洛书》为律本，皆因九其寸尺为律，十其寸尺为度。其三，中国律学家几千年来制律所用皆以 9寸之尺为黄钟，用三分损益法求其他各律是中国几千年以来制律之法。此法最早存见于公元前 4世纪管仲（卒于公元前 645年）所著的《管子·地员篇》[5]中。《地员篇》是一篇研究土壤的论文，该文中管子提出了有关音律与农业生产有关联的论点，文中维妙而简练地论述曰，“凡将起五音，先主一而三之，四开以合九九，以是生黄钟小素之首，以成宫。三分以益之以一，为百有八，为徵。不无有三分去其乘，适足以生商。有三分而复于其所，以是生羽。有三分去其乘，适足以是生角”。

按三分损益法求出的是黄钟宫 81、林钟徵 108、太簇商 72、南吕羽 96、姑冼角 64。它是按振动体长度来进行计算的，文中“小素”乃白练、熟丝，由此可知是在弦上求律。其后《吕氏春秋》[6]用相同之法求出的是十二律。司马迁《史记》卷二十五更详细地记载了十二律生成之法。汉代的京房 60律，南宋钱乐之（424—453年）的 360律以及南朝宋人何承天（370—447年）的新律等等，都是按 9寸 81分尺用三分损益法所算。朱氏称黄钟 9寸 81分尺数为律本也。

黄钟之尺长 10寸，10寸者横黍为分也，每寸皆 10分，所以黄钟之长为 100分。以 10进位，可得 10微为忽，10忽为丝，10丝为毫，10毫为厘，10厘为分，10分为寸，10寸为尺，10尺为丈，10丈为引。此乃中国古代五度所起和五度正数。河图 10数最大，自乘得 100数，朱氏称之为度母。

三、十二平均律解

将一个八度分成频率相等的 12个部分曰平均律，即各音级之间的振动比相等称平均律（朱氏曰密律），亦曰十二等比律，不按等比划分的则称

为十二不平均律（如五度相生律、三分损益律、纯律等），朱氏称之为约律。它是数理调音的一种体系，它的生律方法是精确规定 8度的比例，并把 8度分成均等 12个半音，用现代数理思维即为：在一个数与其 2倍之间，造成一个 12级的等比级数，而求其比率是多少。亦可理解为：若设其比率为 x，那么八度间的 12个音应形成如下关系：

乐音比：1 ∶ $^{\#}1$ ∶ 2 ∶ $^{\#}2$ ∶ 3 ∶ 4 ∶ $^{\#}4$ ∶ 5 ∶ $^{\#}5$ ∶ 6 ∶ $^{\#}6$ ∶ 7 ∶ 1

频率比：$1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : x^6 : x^7 : x^8 : x^9 : x^{10} : x^{11} : x^{12}$

若根据平均律五度的频率比，求出 $^{\#}c$音与 c音的频率比，$^{\#}c$音由 c音上生 7次即得 $\frac{\left(\frac{433}{289}\right)^7}{2^4} = \frac{89}{84}$，根据十二平均律各相邻二律（半音）间的频率比都相等之原则，这个 $\frac{89}{84}$连续自乘 12次，就分别产生十二平均律各律，而乘到第 12次就达到 2的（八度）：$\left(\frac{89}{84}\right)^{12} = 2$，这个数（即 1.059 5）与频率比相应，正是平均律的“频率倍数”，把这个数连续自乘 12次就得到平均律各律的频率倍数。当然这种定律方法是人为的，但是它的误差不会使习惯于该体系的听觉感到不悦，其优点是能够转调、移调，特别适应键盘乐器演奏，西方称十二平均律为“标准调音”，但是它的数理首创却无可争辩的属于中国的朱载堉。

四、朱载堉十二平均律（密律）解

朱载堉“新法密率”据《周礼·考工记》[7]“栗氏为量，内方尺而圆其外”，以方边一尺为黄钟长度，此算数特点有二：其一是当时的开平方、开立方，须要形象地建立起平方积和立方积。其二是不用小数算法，故加大倍数算法是常见演算之法。朱氏主张“律度量衡无非倍者”，故算法皆从倍律（低八度）开始。由此得倍黄钟等于 $1^2 + 1^2 = 2$尺，根据“方边即黄钟正律”，用勾股算法得出勾 10寸，股 10寸各自乘法相加共得 200寸为幂，以此弦幂开方得蕤宾倍律 $\sqrt{1^2 + 1^2} = 1.414\ 213\ 5$尺，这个长度数据即为量方斜、圆经即 8度的 $\frac{1}{2}$倍律蕤宾。以此再开方得出南吕（8度的 $\frac{1}{4}$）即倍南吕等于 $\sqrt[4]{2} = 1.189\ 207\ 1$尺。以此开三次方得倍应钟（八度的 $\frac{1}{12}$）即倍应钟 $\sqrt[12]{2} = 1.051\ 463\ 0$尺。由此可知，$\sqrt[12]{2}$是朱载堉育密律算法的核心。

《河图》数一六居下，二七居上，三八居左，四九居右，五十居中，构成四层数点，最内一层 5个数点，次外一层有 10个数点，以此为边长画两个正方形（大方函小方如“回”字），内小方边长为 5，其边长之幂为 5乘 5得 25数，外围边长为 10数，10与 10之积为 100数，它们的比是 1∶4，以内方中心为圆心，中心点至方角的距离为半径画圆，圆的直径是 7.071 06再以此径为边长画次方函圆于内，次方之外又画一圆，其直径为 10。此圆则函次方切外方，外方之边长亦为 10，这样以 5和 10为边长的两个正方形之间又有两个圆和一个正方形。中间正方形边长之幂为 50数，是内方边长幂 25之倍数，外方边长幂数 100，正好是中方边长幂之倍数。外方之长正应黄钟 10寸律长，内方之长 5寸正应黄钟半律之长。中间之方其边长必为 7.07 106寸，应蕤宾正律之长。黄钟与蕤宾之间即中方与外方之间便有大吕、太簇、夹钟、姑冼、仲吕；蕤宾正律与黄钟半律之间。中方与内方之间则有林钟、夷则、南吕、无射、应钟，其参差序列十二律全包囊其中。在第三层和第四层之间，也隐藏着产生十二倍律的数理。可见《河图》四层方圆相函之数理，正合十二律之度，而从圆中亦可求黄钟等律之体积、厚薄之数，在此不再赘言。图 1所示上述所言之实：

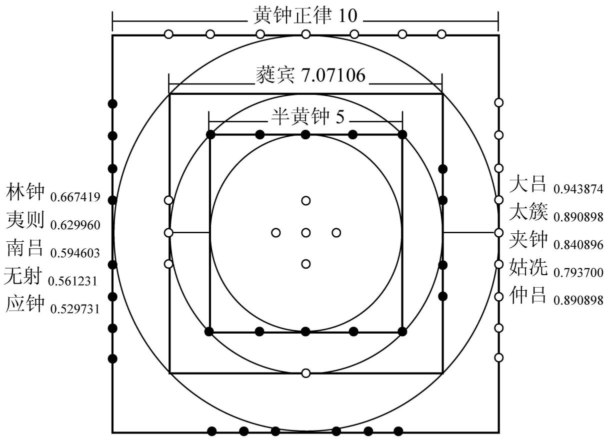

图 1 《河图》数度与十二律数度图

五、《洛书》与十二平均律

《洛书》九数，似与十二律不相干系，其实不然，古人早就有“律历和谐之论，十二支同十二律相配一例。在洛书中十二支辰的顺序和方位配以十二律。因洛书只有 9个数位，故配 9律后，另外 3律必须重复 3个数位方可配全 (重复 6、5、4）见图 2。

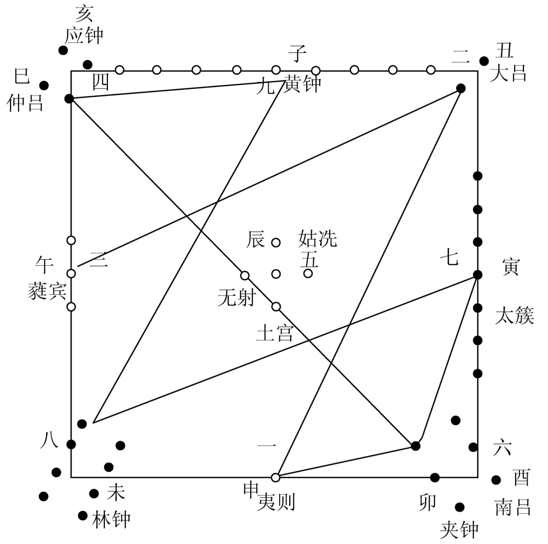

图 2　洛书配十二支辰十二律

图 2中按 9、2、7、6、5、4、3、8、1、6、5、4顺数为十二律长短的顺序；依 9、8、7、6、5、4、3、2、1、6、5、4顺数则是十二律相生的次序。依此相配的十二律组成六对律吕，与《周礼·大司乐》[7]所言“奏黄钟，歌大吕，舞《云门》，以祀天神。奏太簇，歌应钟，舞《咸池》，以祭地祗。奏姑冼，歌南吕，舞《大韶》，以祀四望。奏蕤宾，歌林钟，舞《大夏》，以祭山川。奏夷则，歌仲吕，舞《大濩》，以享先妣。奏无射，歌夹钟，舞《大武》，以享先祖”正好相应。同时与《明实录》[8]嘉靖九年乙卯日礼部以上厘正郊典载：“荐神之乐乃奏黄钟，歌大吕，子丑合也。舞《云门》以祀天神，乃奏太簇，歌应钟，寅亥合也。舞《咸池》以祀地，乃奏姑冼，歌南吕，辰酉合也。舞《大韶》，以祭四望，乃奏蕤宾，歌林钟，午未合也，舞《大夏》升以祭山川及奏夷则，歌小吕，己甲合也。舞《大武》以享先祖，舞《大濩》以享先妣，所谓降神之乐”也完全相合。

六、结　语

综上所述朱载堉新法密率与《河图》、《洛书》之关系，诠释了朱氏密率律、度之数源于《河图》、《洛书》之中的内在联系。《河图》内方函而圆其外之图解，详细标出了十二律之数据长度，并将《洛书》九数与十二律相配之法作了通俗的解释，文中引《周礼·大司乐》及《明实录》为证，将《洛书》九数、十二律吕、十二支辰、六代乐舞相配及祭祀的应用作了详细的释解。其结论是：十二平均律数、度数源于《河图》、《洛书》两书。朱载堉在“律吕本源第一”中引何瑭之言曰“夫度量权衡所以取法于黄钟者，盖贵其与天地之气相应也，黄钟之长固非人所能为，至于九其寸为律，十其寸为尺，则人之所为也。”朱氏称“何氏此论发千载之秘，破万古之惑”。“度本起于黄钟之长，则黄钟之长即是一尺。所谓长九寸，长八寸十分一之类，盖算家立率耳。”此论是朱氏立率的根本，度母之概念即横黍之尺，律本之概念即纵黍之尺也，至于纵黍 9寸则为九进制，横黍 10寸则是十进制，二者之间只是换算方法不同而已。

参考文献：

[1] 朱载堉. 律学新说 [M]. 北京：人民音乐出版社，1986：10.

[2] 班固. 汉书·律历志 [M]. 北京：中华书局，1999：832—836.

[3] 冯国超. 淮南子：第 60册 [M]. 长春：吉林人民出版社，2005.

[4] 司马迁. 史记 [M]. 北京：中华书局，1999.

[5] 管子. 管子·地员篇 [M]. 呼和浩特：远方出版社，2006：408.

[6] 吕不韦. 吕氏春秋 [M]. 呼和浩特：内蒙古文化出版社，2006：81.

[7] 许嘉璐. 文白对照十三经·周礼 [M]. 广州：广东教育出版社，2005.

[8] 李国祥，杨昶. 《明实录》类纂：文教科技卷 [M]. 武汉：武汉出版社，1992.

[责任编辑　杨玉东]